# Математический аппарат

## Изучение методов получения динамических кривых

Имеется последовательность точек , принадлежащих некоторой параметрически заданной плоской кривой . – значение параметра кривой соответствующего . Известно, что кривая гладкая. Необходимо интерполировать кривой такой, что имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.

Поскольку функции и заданы параметрически, их можно интерполировать независимо друг от друга. Используем для интерполяции кубические сплайны. Данный тип интерполяционных функций обладает непрерывной производной до второго порядка включительно, а также большим количеством способов интерполяции.

Кубический сплайн можно записать, как

,

где , .

Интерполяционный сплайн позволяет хорошо аппроксимировать гладкие функции только если узловые точки приналежат функции или близки к ней. Если исходные данные содержат в себе случайную компоненту, то интерполяционные полиномы будут следовать тем же случайным флуктуациям и дадут неверное представление о природе интерполируемой функции. Кроме того, в случае повышенных требований к гладкости интерполяционных кривых, можно позволить сплайну отклоняться от узловых точек.

Предположим, что ординаты точек получены из следующего выражения:

Где образуют последователность независимых, случайно распределённых величин с . В этом случае мы можем восстановить построив сплайн , минимизирующий значение следующего выражения:

Где .

Параметр отражает относительное влияние конфликтующих между собой условий: оставаться вблизи узловых точек и получения гладкой аппроксимирующей функции. Заметим, что линейная функция удовлетворяет условию:

Что свидетельствует о том, что в предельном случае, когда и значение имеет лишь гладкость функции сплайн становится прямой. Сдругой стороны при значение имеет лишь близость к узловым точкам и полученный сплайн будет проходить точно через заданные точки.

Принимая во внимание кусочную природу сплайна можно записать как:

А учитывая, что сплайн построен из кубических сегментов вторая производная на любом интервале является линейной функцией:

Где .

Тогда штрафная функция может быть переписана следующим образом:

Где .

Рассмотрим случай естественного сплайна, проходящего через точки и удовлетворяющего граничным условиям и . Дополнительной особенностью построения сглаживающего сплайна по сравнению с интерполяционным сплайном является необходимость определения ординат , которые более не являются ординатами .

Для построения кубического сплайна необходимо найти коэффициентов: . Можно сконцентрироваться на задаче определения параметров и , если элиминировать оставшиеся параметры и . Рассмотрим поэтому *i*-тый сегмент, стягивающий разрыв между и и поэтому удовлетворяющий следующим условиям:

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

Первое условие можно принять как тождество. По второму условию получаем , что позволяет выразить . Третье условие вновь примем за тождество. Четвёртое условие позволяет установить , из чего получаем . Подставив это в предыдущее уравнение получим окончательную зависимость .

Теперь и выражены через и . Чтобы определить последние, используем условие непрерывности первой производной для соединения сегментов:

Заменив и на полученные выше выражения получим:

Варируя *i* от *1* до *n-1* и учитывая граничные условия получим следующую матричную систему:

Где

Матричное уравнение может быть кратко записано как:

Сходным образом можно переписать и штрафную функцию:

Где – диагональная матрица . Подставив можно получить штравную функцию, зависящуютолько от вектора *d*, содержащего ординаты узловых точек:

Оптимальными значениями орлинат будут те, что минимизируют функцию . Продифференцировав это выражение и приравняв к 0 получим:

Что является условием минимизации. Из этого можно получить:

Затем умножим это слева на , вновь преобразуем при помощи и сгруппируем:

Где . Как только эта система будет решена относительно *b*, *d* может быть получено по формуле:

После этого могут быть получены и оставшиеся коэффициенты.

## Замена параметра

### Кривая. Параметрически заданная кривая. Длина кривой. Естественная параметризация

Пусть – евклидово *n*-мерное пространство. – открытый интервал прямой (*I* может совпадать с ).

Элементарной кривой в называется множество точек, гомеоморфное некоторому интервалу *I* числовой прямой .

Множество точек в назовём кривой, если для каждой её точки существует часть кривой, содержащая эту точку,гомеоморфная некоторому интервалу числовой прямой , т. е. В некоторой окрестности каждой своей точки кривая является элементарной.

Пусть – прямоугольная декартова система координат и – координаты точки *p* кривой , – её радиус вектор. Тогда ***r*** как и *p* есть функции параметра , т. е.

Данное выражение называют векторным уравнением кривой. Разложив по координатным векторам базиса:

Получим параметрическое уравнение кривой :

Кривая называется гладкой, если является гладкой функцией, т.е. имеет все производные:

Которые являются непрерывными функциями, и касательный вектор (вектор скорости) в каждой точке отличен от нулевого

Вектор является направляющим вектором касательной к кривой.

Пусть кривая задана уравнениями и . Тогда длина дуги кривой , соединяющей точки и определяется интегралом:

Пусть – фиксированная точка кривой , а – переменная. Обозначим через *s* длину дуги кривой , соединяющей точки и . Тогда имеем

т.е. *s* есть функция параметра *t*: . Можно показать, что к ней существует обратная . Подставляя это в векторное уравнение кривой осуществляем замену параметра

Где в качестве параметра точки *p* выступает *s* – длина дуги . Такая параметризация называется естественной.

### Плоские кривые

Пусть – некоторая кривая на евклидовой плоскости, заданная векторным уравнением:

или параметрическими уравнениями:

Длина касательного вектора вычисляется по формуле:

а длина дуги кривой, соединяющей и примет вид:

### Численная репараметризация

Имеется плоская кривая , имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно. Функции и являются кубическими интерполяционными сплайнами. Необходимо выполнить замену параметра , где – длина дуги кривой .

Для репараметризации кривой численными методами, построим сеточную функцию . В качестве ординат используем объединение узловых точек сплайнов и . Найдём значение абсцисс численным интегрированием:

Поскольку интеграл аддитивен по промежутку интегрирования, достаточно найти интеграл независимо для всех отрезков . Теперь, имея сетчатую функцию , можно получить последовательности точек и и интерполировать их. Полученная параметрическая кривая проходит через узловые точки при значении параметра и может считаться естественно параметризованной.

## Выделение экстремальных точек

### Вертикальные и горизонтальные экстремумы

Дана плоская, естественно параметризованная кривая . Функции и – субические интерполяционные сплайны:

Необходимо найти вертикальные и горизонтальные экстремумы кривой .

Рассмотрим сегменты, из которых состоят сплайн-функции. Каждый сегмент представляет собой кубический многочлен и используется на определённом интервале. Заметим, что если сплайн имеет экстремум в определённой точке, то его имеет и соответствующий этой точке сегмент сплайна. Верно и обратное: если многочлен, используемый в сегменте сплайна имеет экстреммум на промежутке, на котором этот сегмент используется в сплайне, то и сам сплайн будет иметь экстремум в этой точке.

Таким образом для нахождения всех экстремальных точек сплайна достаточно найти экстремумы всех кубических многочленов, его составляющих и определить, попадают ли они на интервал соответствующего сегмента.

Найдём первую производную и приравняем к 0:

Решив полученное квадратное уравнение получим точки возможного экстремума сплайна:

Полученные корни в количестве от нуля до двух проверяются на принадлежность к интервалу, на котором сплайн действителен и в случае попадания в интервал являются экстремумами всего сплайна. Данный подход может быть использован как для поиска горизонтальных, так и вертикальных экстремумов.

### Экстмемум по кривизне

Похожим образом получим и экстремумы по кривизне.

Пусть кривая задана естественной параметризацией:

Вектор ускорения – это вектор кривизны кривой, а его длина

Кривизной кривой в точке *p*. Радиусом кривизны кривой называется .

Рассмотрим и на объединённой сетке узлов каждого сплайна. На каждом из промежутков между узлами сегменты сплайнов не меняются, что позволяет говорить о единой функции кривизны для данного промежутка:

Найдём производную и приравняем к 0:

Данное уравнение распадается на 2 условия:

Причём второе условие можно упростить:

Тогда вся система преобразуется к виду:

Теперь, зная вид функции, подставим её в уравнения

Найдём экстремальные точки:

Теперь вернёмся в корням знаменателя:

Данное условие выполняется только при равенстве соответствующих коэффициентов сплайнов, что на практике встречается редко. В случае, если оно всё же выполнилось, получаем точку разрыва, в которую не должен попадать корень числителя. Затем необходимо проверить, что корень попадает в интервал, на котором действительна построенная нами функция кривизны.