# Математический аппарат

## Изучение методов получения динамических кривых

Имеется последовательность точек , принадлежащих некоторой параметрически заданной плоской кривой . – значение параметра кривой соответствующего . Известно, что кривая гладкая. Необходимо интерполировать кривой такой, что имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.

Поскольку функции и заданы параметрически, их можно интерполировать независимо друг от друга. Используем для интерполяции кубические сплайны. Данный тип интерполяционных функций обладает непрерывной производной до второго порядка включительно, а также большим количеством способов интерполяции.

Кубический сплайн можно записать, как

,

где , .

Интерполяционный сплайн позволяет хорошо аппроксимировать гладкие функции только если узловые точки приналежат функции или близки к ней. Если исходные данные содержат в себе случайную компоненту, то интерполяционные полиномы будут следовать тем же случайным флуктуациям и дадут неверное представление о природе интерполируемой функции. Кроме того, в случае повышенных требований к гладкости интерполяционных кривых, можно позволить сплайну отклоняться от узловых точек.

Предположим, что ординаты точек получены из следующего выражения:

Где образуют последователность независимых, случайно распределённых величин с . В этом случае мы можем восстановить построив сплайн , минимизирующий значение следующего выражения:

Где .

Параметр отражает относительное влияние конфликтующих между собой условий: оставаться вблизи узловых точек и получения гладкой аппроксимирующей функции. Заметим, что линейная функция удовлетворяет условию:

Что свидетельствует о том, что в предельном случае, когда и значение имеет лишь гладкость функции сплайн становится прямой. Сдругой стороны при значение имеет лишь близость к узловым точкам и полученный сплайн будет проходить точно через заданные точки.

Принимая во внимание кусочную природу сплайна можно записать как:

А учитывая, что сплайн построен из кубических сегментов вторая производная на любом интервале является линейной функцией:

Где .

Тогда штрафная функция может быть переписана следующим образом:

Где .

Рассмотрим случай естественного сплайна, проходящего через точки и удовлетворяющего граничным условиям и . Дополнительной особенностью построения сглаживающего сплайна по сравнению с интерполяционным сплайном является необходимость определения ординат , которые более не являются ординатами .

Для построения кубического сплайна необходимо найти коэффициентов: . Можно сконцентрироваться на задаче определения параметров и , если элиминировать оставшиеся параметры и . Рассмотрим поэтому *i*-тый сегмент, стягивающий разрыв между и и поэтому удовлетворяющий следующим условиям:

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

Первое условие можно принять как тождество. По второму условию получаем , что позволяет выразить . Третье условие вновь примем за тождество. Четвёртое условие позволяет установить , из чего получаем . Подставив это в предыдущее уравнение получим окончательную зависимость .

Теперь и выражены через и . Чтобы определить последние, используем условие непрерывности первой производной для соединения сегментов:

Заменив и на полученные выше выражения получим:

Варируя *i* от *1* до *n-1* и учитывая граничные условия получим следующую матричную систему:

Где

Матричное уравнение может быть кратко записано как:

Сходным образом можно переписать и штрафную функцию:

Где – диагональная матрица . Подставив можно получить штравную функцию, зависящуютолько от вектора *d*, содержащего ординаты узловых точек:

Оптимальными значениями орлинат будут те, что минимизируют функцию . Продифференцировав это выражение и приравняв к 0 получим:

Что является условием минимизации. Из этого можно получить:

Затем умножим это слева на , вновь преобразуем при помощи и сгруппируем:

Где . Как только эта система будет решена относительно *b*, *d* может быть получено по формуле:

После этого могут быть получены и оставшиеся коэффициенты.

## Замена параметра

### Кривая. Параметрически заданная кривая. Длина кривой. Естественная параметризация

Пусть – евклидово *n*-мерное пространство. – открытый интервал прямой (*I* может совпадать с ).

Элементарной кривой в называется множество точек, гомеоморфное некоторому интервалу *I* числовой прямой .

Множество точек в назовём кривой, если для каждой её точки существует часть кривой, содержащая эту точку,гомеоморфная некоторому интервалу числовой прямой , т. е. В некоторой окрестности каждой своей точки кривая является элементарной.

Пусть – прямоугольная декартова система координат и – координаты точки *p* кривой , – её радиус вектор. Тогда ***r*** как и *p* есть функции параметра , т. е.

Данное выражение называют векторным уравнением кривой. Разложив по координатным векторам базиса:

Получим параметрическое уравнение кривой :

Кривая называется гладкой, если является гладкой функцией, т.е. имеет все производные:

Которые являются непрерывными функциями, и касательный вектор (вектор скорости) в каждой точке отличен от нулевого

Вектор является направляющим вектором касательной к кривой.

Пусть кривая задана уравнениями и . Тогда длина дуги кривой , соединяющей точки и определяется интегралом:

Пусть – фиксированная точка кривой , а – переменная. Обозначим через *s* длину дуги кривой , соединяющей точки и . Тогда имеем

т.е. *s* есть функция параметра *t*: . Можно показать, что к ней существует обратная . Подставляя это в векторное уравнение кривой осуществляем замену параметра

Где в качестве параметра точки *p* выступает *s* – длина дуги . Такая параметризация называется естественной.

### Плоские кривые

Пусть – некоторая кривая на евклидовой плоскости, заданная векторным уравнением:

или параметрическими уравнениями:

Длина касательного вектора вычисляется по формуле:

а длина дуги кривой, соединяющей и примет вид:

### Численная репараметризация

Имеется плоская кривая , имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно. Функции и являются кубическими интерполяционными сплайнами. Необходимо выполнить замену параметра , где – длина дуги кривой .

Для репараметризации кривой численными методами, построим сеточную функцию . В качестве ординат используем объединение узловых точек сплайнов и . Найдём значение абсцисс численным интегрированием:

Поскольку интеграл аддитивен по промежутку интегрирования, достаточно найти интеграл независимо для всех отрезков . Теперь, имея сетчатую функцию , можно получить последовательности точек и и интерполировать их. Полученная параметрическая кривая проходит через узловые точки при значении параметра и может считаться естественно параметризованной.

## Выделение экстремальных точек

### Вертикальные и горизонтальные экстремумы

Дана плоская, естественно параметризованная кривая . Функции и – субические интерполяционные сплайны:

Необходимо найти вертикальные и горизонтальные экстремумы кривой .

Рассмотрим сегменты, из которых состоят сплайн-функции. Каждый сегмент представляет собой кубический многочлен и используется на определённом интервале. Заметим, что если сплайн имеет экстремум в определённой точке, то его имеет и соответствующий этой точке сегмент сплайна. Верно и обратное: если многочлен, используемый в сегменте сплайна имеет экстреммум на промежутке, на котором этот сегмент используется в сплайне, то и сам сплайн будет иметь экстремум в этой точке.

Таким образом для нахождения всех экстремальных точек сплайна достаточно найти экстремумы всех кубических многочленов, его составляющих и определить, попадают ли они на интервал соответствующего сегмента.

Найдём первую производную и приравняем к 0:

Решив полученное квадратное уравнение получим точки возможного экстремума сплайна:

Полученные корни в количестве от нуля до двух проверяются на принадлежность к интервалу, на котором сплайн действителен и в случае попадания в интервал являются экстремумами всего сплайна. Данный подход может быть использован как для поиска горизонтальных, так и вертикальных экстремумов.

### Экстмемум по кривизне

Похожим образом получим и экстремумы по кривизне.

Пусть кривая задана естественной параметризацией:

Вектор ускорения – это вектор кривизны кривой, а его длина

Кривизной кривой в точке *p*. Радиусом кривизны кривой называется .

Рассмотрим и на объединённой сетке узлов каждого сплайна. На каждом из промежутков между узлами сегменты сплайнов не меняются, что позволяет говорить о единой функции кривизны для данного промежутка:

Найдём производную и приравняем к 0:

Данное уравнение распадается на 2 условия:

Причём второе условие можно упростить:

Тогда вся система преобразуется к виду:

Теперь, зная вид функции, подставим её в уравнения

Найдём экстремальные точки:

Теперь вернёмся в корням знаменателя:

Данное условие выполняется только при равенстве соответствующих коэффициентов сплайнов, что на практике встречается редко. В случае, если оно всё же выполнилось, получаем точку разрыва, в которую не должен попадать корень числителя. Затем необходимо проверить, что корень попадает в интервал, на котором действительна построенная нами функция кривизны.

## Вариативность почерка

Одной из основных проблем распознавания почерка является учёт вариативных изменений кривой. При этом возможны такие локальные трансформации, при которых появляются или исчезают отдельные элементы подписи.

Вариативным изменением 1-го рода будем называть такую вариацию траектории, при которой происходит локальное изменение её формы.

Вариативным изменением 2-го рода будем называть такую вариацию траектории, при которой происходит добавление и удаление её элементов.

Основу метода верификации составляет принцип сопоставления двух кривых на основе нахождения соответствующих пар вертикальных экстремумов, принадлежащих двум образам. При этом, естественно, имеет смысл искать соответствия для вертикальных экстремумов только вида «минимум-минимум» и «максимум-максимум». При рассмотрении вариативных изменений вводится ограничение, что два соответствующих сегмента кривой могут отличаться не более чем на два вертикальных экстремума. На практике это ограничение выполняется практически всегда.

### Сопоставление траекторий

Для описания базовых сопоставимых единиц траекторий вводится понятие хорды – это отрезок, соединяющий вертикальные экстремальные точки противоположного типа. На вход алгоритма сопоставления двух динамических кривых поступает набор упорядоченный набор хорд, являющихся допустимыми сочетаниями пар экстремумов. Задачей алгоритма является нахождение оптимального соответствия между экстремальными точками, представляющими концы хорд.

Данная задача решалась методом динамического программирования. Первым этапом алгоритма является заполнение таблицы штрафов, в которой на пересечении строк и столбцов находятся величины, характеризующие степень отличия соответствующих элементов рукописных кривых. При этом применялись две метрики: «манхеттенская» и «по Журавлёву». Первая метрика учитывает положение пары хорд относительно друг друга и относительно места в кривой, а также относительные размеры хорд:

Сопоставление по указанной мере производилось изсоображений, чтобыразличие по одной из координат не приводилок неверному решению, что не исключено при сравнении по евклидовой мере. Однако данные меры не учитывают поведение кривой на участке между двумя вертикальными экстремумами. Поэтому дополнительнобыла введена мера структурной схожести («по Журавлёву») участков траектории, принимающая значение 0 или 1.

Сам алгоритм динамического программирования состоит из двух последовательных действий: прямого прохода, когда ищется локально-оптимальное продолжение траектории и обратного прохода, когда выбирается путь, доставляющий минимальный финальный штраф за несоответствие двух траекторий.

Поскольку при прямом проходе алгоритма имеет смысл находить соответствие только между вертикальными экстремумами одного типа, то из ячейки возможно продолжение в одну из трёх ячеек: , , . В каждой ячейке может находиться до трёх «подтаблиц» содержащих штрафы за сопоставление хорд с учётом вариативной трансформации 1-го рода.

### Анализ формы траектории

Алгоритм сопоставления позволяет получить набор гипотез для отбора кандидата на роль эталонной подписи, отсеяв грубые структурные несоответствия. Для тчательного анализа желательно проводить более детальное исследование кривых. Для этого предлагается сравнивать углы между касательными в парах соответствующих друг другу экстремальных точках. Поскольку всё, что требуется получить от касательных – это угол между ними, предлагается вместо них использовать касательный вектор.